इकाई 2 गणित सीखने में बच्चों की सहायता करना

संरचना

2.1 प्रस्तावना

उद्देश्य

2.2 अपने षिक्षार्थी को जानो

2.2.1 बच्चे वस्तुओं के अनुभव से सीखते हैं।

2.2.2 बच्चों की सीखने की अपनी ही विधियाँ होती हैं।

2.2.3 बच्चों अपने चारों ओर गणित को देखते हैं।

2.2.4 प्रत्येक बच्चा विशिष्ट है।

2.3 अधिगम को कैसे आधार दें?

2.3.1 बच्चों की पृष्ठभूमि को आधार बनाएँ

2.3.2 खेल व अन्य गतिविधियाँ

2.4 सीखने में मदद कैसे की जा सकती है?

2.4.1 पुनरावृत्ति, थकाने वाली न हो

2.4.2 बच्चे एक–दूसरे से सीखते हैं।

2.4.3 त्रुटियाँ भी उपयोगी होती हैं।

2.5 सारांष

2.6 अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

2.1 प्रस्तावना

क्या आपको अपने विद्यालय के दिन याद है, क्या आपको गणित पसंद था, क्या आपको गणित पढ़ने में आनन्द आता था, क्या आपके अध्यापक ने कभी आपको सिखाने में रुचि ली? जब आप गणित सीखने के लिए परिश्रम करते थे, क्या आपके अध्यापक ने कभी किसी ढंग से आपकी सहायता की? क्या जो गणित आप विद्यालय की कक्षा में सीख रहे थे, उसे अपने दैनिक जीवन से जोड़ पाए? इस इकाई में प्रष्नों द्वारा उभरी इन्हीं समस्याओं पर चर्चा की गई है तथा इस बात पर भी प्रकाष डालने का प्रयास किया गया है कि एक अध्यापक को अपने षिक्षार्थी को जानना कितना आवष्यक है? इस इकाई का निर्माण इसी विष्वास के साथ किया गया है कि प्राथमिक षिक्षा को बच्चों के परिप्रेक्ष्य में देखा जाए।

हम इस प्रकार प्रारम्भ करते हैं कि कैसे बच्चे सिखाने पर प्रतिक्रिया करते हैं व सीखने के लिए कौन सी विधियाँ अपनाते हैं? हम यह भी जानने का प्रयास करेंगे कि बच्चे जो गणित विद्यालयी कक्षा में सीखते हैं, उसे किस प्रकार घर पर होने वाली क्रियाओं में अभ्यास में लाया जाए, जिससे उनकी सीखने की गति में वृद्धि हो सके।

हम इस बात भी चर्चा की गई है कि कैसे बच्चे अपने पूर्ण विकास में एक विशेष प्रकार के प्रतिमान को लेकर चलते हैं, जो लगभग एक जैसा और सर्वव्यापी होता है। लेकिन जब ज्ञान अर्जन का प्रष्न आता है, तो प्रत्येक बच्चा भिन्न होता है। प्रत्येक बच्चा जब किसी परिप्रेक्ष्य के सम्मुख आता है तो वह किसी वस्तु को समझने के लिए अपने ही ढंग अपनाता है।

हमने उन सिद्धान्तों पर विशेष बल देने का प्रयास किया है, जिन्हें अध्यापक प्राथमिक विद्यालय के बच्चों को गणित पढ़ाते समय विशेषतया ध्यान में रखेंगे। यह आपको

प्राथमिक कक्षाओं के बच्चों के लिए एक उचित व अनुकूल वातावरण बनाने में सहायता करेगा।

इस इकाई में इस बात पर भी जोर दिया गया है कि एक प्राथमिक विद्यालय के अध्यापक को उन विषयों के प्रति संवेदनषील होना चाहिए, जो बच्चे की गणित सीखने की योग्यता का निर्धारण करते है तथा वे समस्याएँ, जो बच्चे के गणित की ओर व्यवहार को प्रभावित करती है। जो बिन्दु हमने इस इकाई में स्पष्ट किये हैं, उन्हें हम उदाहरणों द्वारा आगे की विषय वस्तु में सुदृढ़ करने का प्रयास करेंगे।

इस इकाई में आपको उस तरह की क्रियाओं और अवसरों के उदाहरण मिलेंगे, जिन्हें बच्चों को, उनकी गणितीय सोच को विकसित करने के लिए दिया जा सकता है। अधिकांशतः जिन क्रियाओं के सुझाव हम दे रहे हैं, वह शहरी स्थिति से हैं। वास्तव में ऐसे उदाहरणों के बारे में सोचना भी कठिन है, जो सभी स्थितियों के लिए समान हो। हमें आषा है कि अपने षिक्षार्थियों की आवष्यक के अनुरूप क्रियाओं का चयन कर, आप उन्हें अपना लेंगे।

उद्देष्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- समझ पाएंगे कि कैसे बच्चे गणित के ज्ञान पर प्रतिक्रिया करते हैं।
- इस बात को परख पाएंगे कि क्यों एक अध्यापक को अपने षिक्षार्थी के विकासात्मक स्तर को जानना आवष्यक है?
- ऐसी विधियों पर चिन्तन कर पाएँगे, जिनके द्वारा बच्चों में गणितीय दृष्टिकोण को विकसित करने में सहायता मिलती है।

2.2 अपने षिक्षार्थी को जानो

आपको अपने विद्यालय के भीतर व बाहर बच्चों के साथ विभिन्न प्रसंगों पर परस्पर बातचीत करनी होगी कि उन अनुभवों से क्या सीखते हैं? जब बच्चे प्राथमिक विद्यालय में प्रवेष लेते हैं तो क्या उनके मस्तिष्क खाली होते हैं? बच्चे गणित, विद्यालय में प्रवेष से बहुत पहले ही सीखना शुरू कर देते हैं। जिस समय से बच्चा जन्म लेता है, आसपास की दुनिया से उसकी अंतः क्रिया प्रारम्भ हो जाती है। शैशवकाल से ही बच्चे अंकों व गणित के बारे कुषलता, धारणाएँ व भ्रम विकसित कर लेते हैं। आप तीन वर्ष की बच्ची को आधा केला, जो वह खा रही है, देने को कहें। वह आपको उसमें से एक टुकड़ा ही देगी जोकि निष्चय ही आधे–से कुछ कम ही होगा। उसने सहभागिता की धारणा को तो ग्रहण कर लिया, लेकिन उसे आधे भाग के बारे में भ्रम है। गणित का सीखना, बच्चे की जानकारी व अनुभव पर अत्यधिक निर्भर करता है, जो वह विद्यालय में प्रवेष लेते समय अपने साथ लाते है। वस्तुओं की जानकारी हेतु बच्चे जो विधि अपनाते है, उसे जानना अध्यापक के लिए अति आवष्यक है। इस इकाई में हम इस प्रष्न पर ध्यान देंगे कि बच्चे गणितीय जानकारी को कैसे अर्जित करते हैं?

चित्र 1: मैं केवल दर्पण के बारे में जानना चाहता था

2.2.1 बच्चे वस्तुओं को अनुभव से सीखते हैं।

सीखने के बारे में एक विचार यह है कि बच्चे, वस्तुओं पर तरह–तरह के प्रयोग करके, उनके बारे में सीखते हैं। वे वस्तुओं का उठाते हैं, उन्हें फंकते हैं, जोड़–तोड़ करते हैं और इस प्रकार उनके बारे में जानकारी प्राप्त करते हैं। वस्तुओं को छूने और उनकी जाँच–पड़ताल करने की बच्चों की स्वाभाविक इच्छा, उन्हें उन वस्तुओं के अलग–अलग पक्षों को समझने

में मदद देती है। इस तरह से वे वस्तुओं के आकार, आकृति और अन्य गुणों के बारे में अपनी समझ बनाते हैं। इसके साथ–साथ वे वस्तुओं के स्थानिक गुणों (spatital properties) को समझ कर उनका प्रयोग कर सकते हैं, जैसे कौन–सी वस्तु किस वस्तु के नीचे रखी जा सकती है, या उनके खिलौने डिब्बों में कैसे आ सकते हैं, आदि।

> **संश्लेषण:** किसी वस्तु या भविष्य के छोटे–छोटे भागों को एक साथ रखकर (जोड़कर) वस्तु या प्रक्रिया को उसके पूरे रूप में समझना।

हो सकता है कि हर बार बच्चे यह न बता सकें कि उन्होंने क्या समझा है? उदाहरण के लिए, हो सकता है कि वे गेंद और पत्थर में अन्तर जानते भी हों और उसे दिखा भी पाएँ, पर बता कर समझा न सके। ठीक वैसे ही जैसे आप साइकिल चलाना जानते हों, तो भी क्या आप 10 वाक्यों में यह बता पाएँगे कि आप साइकिल कैसे चलाते हैं?

वस्तुओं का अनुभव करते हुए और उनके बारे में सोचते हुए बच्चे और भी बहुत कुछ कर रहे होते हैं। खेलकूद और बड़ों से मेलजोल के दौरान बच्चों का कई तरह की अवधारणाओं और कौषलों से सामना होता है। और इन पर वे तरह–तरह से कुशलता प्राप्त करने का प्रयास करते हैं। जैसे कि, "आधे" का अर्थ समझाने के लिए बच्चों के तरह–तरह की वस्तुओं को आधे से बाँटने को कहा जाए तो वे धीरे–धीरे "आधे" की अवधारणा की समझ बनाएँगे। इस प्रकार अलग–अलग प्रकार की गतिविधियों को करते हुए, बच्चे उनका विश्लेषण और संश्लेषण भी करते हैं। इसी प्रक्रिया में वे अपने आस–पास के संसार की समझ विकसित करते है। आइए, एक अभ्यास द्वारा यह जानें कि आपने बच्चे के सीखने की विधियों में अब तक कितना समझा है?

E1) आपके विचार से, छोटे बच्चों के बारे में नीचे दिए गए कथनों में से कौन–से सही है? सही कथन के लिए (√) और गलत के लिए (×) लिखें।

क) बच्चे जितना बता पाते हैं, उससे अधिक जानते हैं।

ख) जब बच्चे विद्यालय जाना प्रारम्भ करते हैं तब वे गणित बिल्कुल नहीं जानते।

ग) गिनती कर पाने का अर्थ है कि संख्याओं के नामों को एक क्रम में बोल पाना।

घ) अगर कोई बच्चा किसी अवधारणा को समझाने के लिए सही शब्द का प्रयोग करता है, तो इसका अर्थ है कि वह उस अवधारणा को समझता है।

2.2.2 बच्चों की सीखने की अपनी ही विधियाँ होती हैं।

7 साल के विभोर से यह पूछा गया कि "आठ वस्तुओं की सात ढेरियों" में कुल कितनी वस्तुएँ हैं? उसने कहा कि उसे नहीं पता। उससे फिर पूछा गया, "क्या तुम इसका उत्तर ज्ञात कर सकते हों?" देर तक चुप रहने के बाद विभोर ने कहा, "56"। "तुमने यह कैसे ज्ञात किया?" विभोर ने बताया, "दस अट्ठे 80 होता है। उसमें से 8 घटाएँ तो 72, फिर 8 घटाएँ तो 64 और फिर से 8 घटाएँ तो 56 बचता है।"

चित्र 2:अपनी गणितीय सोच विकसित करते हुए एक बच्ची

कक्षा 3 की शान्ता से 189–67 हल करने को कहा गया। उसने कहा कि यह 3+30+80 = 122 है। उसकी इस विधि को अध्यापक ने "गलत" ठहराया क्योंकि उनकी उत्तर पाने का विधि थी "189 से 7 घटाएँ और फिर 60"।

अगर, इस तरह से बच्चों को अपनी विधियों से प्रश्नों को हल करने से रोका जाए तो उनकी सोचने, संबंध बनाने और गणित में क्रम पहचानने की क्षमता के विकास में बाधा आती है। इसके स्थान पर, वे समझते हैं कि गणित सीखने का अर्थ है – एक–दूसरे के

संबंध न रखने वाले और अर्थहीन तथ्यों को सीखना या कुछ सूत्रों को रट–रट कर लागू करना (गणित के पहाड़े इसका एक उदाहरण है)।

अगर आप बच्चों को गणित के प्रष्न अपनी विधियों से करने दें, तो आपको उनके सोचने में अभूतपूर्व विविधता दिखाई देगी। इस बारे में एक अध्यापक के कथन पर ध्यान कीजिए:

"बच्चों को गणित पढ़ाते हुए मुझे अक्सर इस बात पर आश्चर्य होता है कि बच्चे कितनी अलग–अलग विधियों से प्रष्नों को हल करते हैं। प्रष्न और उत्तर के बीच तर्कों का एक क्रम होता है। जिन्हें बच्चे अक्सर स्वयं ही सोचते हैं। मैने एक बार बच्चों को दो अंकों वाली दो संख्याओं को गुणा करना सिखाया। मैंने कुछ प्रष्न हल किए और उन्हें कई बार सूत्र विधि समझायी। फिर मैंने उन्हें यह प्रष्न दिया:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 13 \\ \hline \end{array}$$

सबसे पहले प्रष्न हल करने वाली बच्ची का उत्तर था 156। उसकी कॉपी में प्रष्न के ठीक नीचे यह उत्तर लिखा था। मैंने उसकी रफ कॉपी देखी तो उसमें 100, 20, 30, 6 आदि लिखा था। बार–बार पूछने पर बच्ची ने कहा, "मैंने पहले 10 को 10 से गुणा किया, फिर 2 को 10 से, आदि।"

एक बार और मैं सरल ब्याज पर प्रष्न करा रहा था जिसमें ब्याज की दर निकालनी थी। बच्चों को प्रष्न दिए मुझे कुछ ही देर हुई थी, कि एक बच्ची ने हाथ उठा लिया। मुझे उसकी गति पर हैरानी हुई। मेरे पूछने पर उसने सही उत्तर (5 प्रतिषत) बताया। मैंने मन ही मन अपने आपको प्रोत्साहित दी कि इतनी कठिन सूत्र विधि मैंने इतनी सफलता से समझा दिया। अचानक मुझे ध्यान आया कि मैं उसकी कॉपी में देखूँ कि उसने प्रष्न को कैसे हल किया। मुझे यह अविष्वास भी था कि संभवतः उसे घर में यह सब सिखाया गया हो। पर बच्चे की कॉपी कोरी थी। मैंने उससे पूछा कि उसने प्रष्न हल कहाँ किया था? उसने कहा, "ओह! मैंने तो वही बताया है, जो आपके कल कहा था। आपने तो कहा था कि जमा किए गए धन पर बैंक 5 प्रतिषत ब्याज देते हैं।" ....

इन दो उदाहरणों से आप किस निर्णय पर पहुँचे? क्या आप मानेंगे कि ये इस बात को स्थापित करते हैं कि बच्चे अपनी विधियों से प्रष्न हल करते हैं? बड़ों की दृष्टि में ये विधियाँ सही भी हो सकती हैं और गलत भी। पर बच्चों की दृष्टि में वे हमेषा सही होते हैं। अपने गणितीय अनुभवों को समझने के लिए बच्चे अपने पुरानी विधियों को बदलते रहते हैं और उनके अनुसार नयी विधियां खोजते रहते हैं। सही वातावरण मिले तो यह प्रक्रिया जारी रहती है और बच्चे को स्वाभाविक रूप से गणित समझने और गणितीय तौर पर सोचने के योग्य बनाती है, परन्तु यदि बच्चों पर एक ही विधि थोपी जाए और अलग हट कर नए ढंग से कुछ करने का अवसर न दिया जाए तो धीरे–धीरे अपनी विधियाँ विकसित करने और अवधारणाओं को समझने की उनकी अपनी क्षमता और इच्छा कम होने लगती है।

अब प्रस्तुत है अभी तक की गई चर्चा पर कुछ अभ्यास।

E2) अपने आसपास कुछ बच्चों को गणित का कोई प्रष्न दें। यह प्रष्न ऐसी किसी अवधारणा पर हो जिसके बारे में उन्हें पहले से हल करने की विभिन्न विधियां या सूत्र विधि न बताए गए हों। क्या सभी बच्चे प्रष्न को हल करने के लिए एक ही विधि अपनाते हैं? वे किन–किन विधियों से यह प्रष्न हल करते हैं।

E3) यहाँ हम चार प्रश्न दे रहे हैं। चार बच्चों ने इनमें से एक–एक प्रष्न, नीचे दी गयी विधियों से हल किया। इन प्रष्नों को हल करने के लिए बच्चों ने कौन–कौन सी विधियां अपनायीं?

क) 8 + 6 = 8 + 2 + 4 = 14

ख) 4 + 9 = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13

ग) 3 + 12 = 12, 13, 14, 15

घ) 7 + 5 = 1 + 1 + ... + 1 (7 बार) 1 + 1 + ... + 1 (5 बार) = 12

इस तरह हम यह कह सकते हैं कि मानक सूत्र विधि बच्चों के सोचने और गणित के बारे में अपनी समझ बनाने में बाधा डालती हैं। उनके चलते गणित सहज प्रतीकों को, मषीनी ढंग से प्रयोग कर पाने का क्रम बन कर रह जाता है। इस बात को वे लोग और भी बढ़ावा देते हैं जो बच्चों को मात्र किसी सूत्र विधि को लागू कर मषीनी ढंग से लिखे गए चरणों के लिए अंक देते हैं।

2.2.3 बच्चों अपने चारों ओर गणित को देखते हैं

आजकल यह विष्वास किया जाता है कि षिक्षा तभी प्राप्त की जा सकती है जब उसका संबंध हमारे आस–पास की घटनाओं से हो। बच्चों को अपने आस–पास गणित को देखने, अर्थ समझने व प्रयोग करने में अध्यापक द्वारा सहायता की जानी चाहिए। छोटे बच्चे गिनती करना, व्यवस्थित करना, श्रेणीबद्ध करना, समूह बनाना व मिलान करने जैसी गणितीय क्रियाएँ करते हैं, जब भी वह खिलौनों व पुस्तकों जैसी वस्तुओं का प्रयोग करते हैं। जब वे खेलते हैं तो उन्हें एक साँचे में समानांतर कतारे, चौकौर, गोल, त्रिकोण व इसी प्रकार के अन्य आकार मिलते है। प्रत्येक बच्चा जानता है कि उसके परिवार में कितने सदस्य है, उसके कितने मित्र हैं व इसी प्रकार की जानकारी अपने आस–पास के लोगों के बारे में भी रखते हैं। जब वह बड़ा होने लगता है तो वह अपने आस–पास घर के बाहर व अन्दर होने वाली ऐसी क्रियाओं पर ध्यान देना आरंभ कर देते हैं।

प्रतिमानों की पहचान नजदीकी वातावरण पर ध्यान देने पर ही होती है। बच्चे घर में बिछौना देखते हैं, जिसमें बहुत–से रेखागणितीय प्रतिमान होते हैं। वे सभी तरह के आकार वाले फर्नीचर को भी देखते हैं। वे दरवाजों, खिड़कियों, कमरों, कमरे की दीवारों व सीढ़ियों इत्यादि पर भी ध्यान देते हैं। बहुत घरों में रोज रंगोली बनाई जाती है। रंगोली में अत्यधिक रेखागणितीय नमूने होते हैं। बच्चों के अनुभवों को विद्यालय में किए जाने वाले गणित से जोड़ना उन्हें प्रयोग द्वारा गणित समझाने में सहायता करता है।

बच्चे यह जानकारी कक्षा तक लाते हैं। अध्यापक के पास यह अवसर होता है कि उस अनुभव को वह कक्षा में सिखाए जाने वाले गणित से जोड़े, जैसे कि माधव ने किया:

माधव : बच्चों कल अवकाष था, आप लोगों ने क्या किया?

अरूण : मैं अपने परिवार के साथ घूमने चला गया था।

माधव : कौन–कौन गया था?

अरूण : मैं, मेरी माँ, मेरे पापा व मेरी बहन सुनीता।

माधव : क्या आप कुछ खाने के लिए ले गए थे?

अरूण : मेरी मम्मी संतरे व सैंडविच लेकर गई थी।

माधव : तुमने और तुम्हारी बहन ने कितने–कितने संतरे खाए?

अरूण : मैंने दो और मेरी बहन ने एक खाया।

माधव : अरूण और उसकी बहन सुनीता ने कितने संतरे खाए?

विक्रम : जी, तीन।

माधव : अरूण क्या यह सही है?

अरूण : हाँ सर, यह सही है, मेरी माँ ने मुझे, मेरी बहन व पापा को दो–दो सैंडविच भी दिए जिसे हमने व एक साथ खाया।

माधव : तो कितने सैंडविच थे?

काबेरी : सर, हम गिन सकते हैं, पाँच हुए।

(काबेरी पहले अपनी दो उंगलियाँ खोलती है, तब और दो उंगलियाँ खोलती हैं और फिर एक, व अपनी पाँचों उंगलियों को गिनकर उत्तर देती हैं)

अरूण : नहीं सर, सात सैंडविच थे। मैंने और मेरी बहन ने चार, पापा ने दो सैंडविच लिए, ये छह हुए, और मेरी माँ ने भी एक सैंडविच खाया, इसलिए कुल सात हुए।

अब एक दूसरी आपसी चर्चा देखें। इस बार का विषय गुणा करना है।

अध्यापक : क्या आप मुझे बता सकते हैं कि आपकी मम्मी कितने अंडे लाई थीं?

अरूण : छह तथा छह, जिसका अर्थ है कि मैं छह में छह जोड़ूँ।

अध्यापक : हाँ, तो बताओ कि आपकी मम्मी कितने अंडे लाई थी?

अनीता : क्या मैं बताऊँ?

अध्यापक : हाँ, हाँ

अनीता : बारह

इस प्रकार की आपसी चर्चा उनके विद्यालयी गणित को जीवन से जोड़ने में और उन्हें बेहतर ढंग से सीखने में मदद करती है। वास्तव में अध्यापक अंडे के डिब्बों को कक्षा में लाकर इस चर्चा को जारी रखकर, गुणा को बार–बार जोड़ने के ढंग से व आयताकार व्यवस्था द्वारा सिखा सकता है।

प्रत्येक घर में कैलेंडर होता है। बच्चे इसका प्रयोग करना आरम्भ कर देते हैं, नहीं तो उन्हें इसका प्रयोग करवाया जाना चाहिए। कैलेंडर अंकों के आकार को पहचानने में भी बच्चों की मदद कर सकता है व उनमें आपसी संबंध को, जैसे कि गिनती, जोड़ना, गुणा इत्यादि। जैसे बच्चे बड़े होते हैं वे खरीदारी में भाग लेने लगते हैं। बच्चों को कहें कि वे घर पर वस्तुओं को उपयोग किए जाने के बाद खाली आवरण लाएँ। उनके साथ उन पर अंकित मूल्य पढ़ें, भार व अन्य अंकित जानकारियाँ भी पढ़ें व उन्हें कक्षा में पढ़कर सुनाएँ। यह बच्चों को माप के सम्प्रत्यय को बेहतर ढंग से समझने में सहायता करता है।

E4) दो ऐसी क्रियाओं के बारे में सोचे, जो आपकी कक्षा के बच्चों के जीवन को कक्षा में पढ़ाए जाने वाले विषय से जोड़ें तथा बच्चों के माता–पिता से आप कहें कि बच्चे विद्यालय में किए जाने वाले गणितीय अभ्यास को उनसे जोड़कर, उन्हें घर पर अभ्यास करें।

2.2.4 प्रत्येक बच्चा विशिष्ट है।

अपनी कक्षा के किन्हीं दो बच्चों के विषय में सोचें। क्या आप कह सकते है कि वे एक समान हैं। क्या वह सभी क्रियाओं को एक ही ढंग से सीखते हैं। ऐसा नहीं होता, क्योंकि बच्चे बहुत भिन्न होते हैं। वास्तव में कोई भी दो बच्चे एक जैसे नहीं होते। वे विविध गतियों से सीखते हैं, घटनाओं पर भिन्न–भिन्न ढंग से प्रतिक्रिया करते हैं व जीवन में विभिन्न अनुभवों को महसूस करते हैं। फिर भी अन्वेषणों ने यह प्रदर्षित है कि इन सभी भिन्नताओं के बाद भी एक समान क्रम दृष्टिगत होता है। बच्चे बौद्धिक विकास की विभिन्न अवस्थाओं से गुजरते हैं व एक अवस्था, दूसरी के बाद आती है। पियाजे ने बौद्धिक विकास की इन अवस्थाओं को सुग्राहिता अवस्था (Sensorimotor), पूर्व क्रियात्मक अवस्था (Pre-operational), मूर्त क्रियात्मकता (Concrete operational) व औपचारिक क्रियात्मक (formal operational) कहा है।

जब बच्चा प्राथमिक विद्यालय में प्रवेष लेता है तो वह बौद्धिक विकास की **मूर्त क्रियात्मक अवस्था** में होता है। इस अवस्था में बच्चा ठोस सामग्री के प्रयोगों द्वारा गणितीय विचारों को सिद्धान्त रूप में ग्रहण कर सकता है। पूर्व क्रियात्मक अवस्था में बच्चे के निर्णय, वस्तुएँ उसे कैसी दिखती हैं, इस पर आधारित होते हैं। बाद में बच्चे जब एक स्तर पर आते हैं, तब वह अंकों का संबंध ज्ञान स्तर पर जोड़ते हैं।

पियाजे एक पाँच वर्षीय बच्चे को वर्णन करते हैं, जो पत्थर के टुकड़ों को इकट्ठा करके खेल रहा है। पहले उसने उन्हें लम्बी कतार में रखकर बाएँ से दाहिने की तरफ गिना। वे दस थे, फिर उसने उसे दाहिने से बाएँ की ओर गिना। उसे बहुत हैरानी हुई। वह फिर भी दस ही थे। फिर उसने उन्हें गोल घेरे में रखा व पहले उन्हें घड़ी की सूईयों की दिषाओं में व फिर विपरीत दिषा में गिना। उत्हास से भरकर उसने पाया कि हर बार पत्थर के टुकड़े दस ही हैं। चाहे वह उन्हें किसी भी ढंग से गिने।

उपर्युक्त स्थिति बड़ों की कल्पना से बाहर है, लेकिन बच्चे अपने आपको इसी प्रकार विष्वास दिलाते हैं व सन्देह दूर करते हैं। **मूर्त क्रियात्मक अवस्था** (Concrete Operational Stage) में बच्चा सुरक्षित अनुभव करता है, जिसमें वह लगभग 6 व 10 वर्ष के बीच होता है और यही वह अवस्था है, जब बच्चा प्राथमिक स्तर पर होता है।

बौद्धिक विकास की अंतिम अवस्था अर्थात **औपचारिक क्रियात्मक अवस्था,** प्राथमिक षिक्षा आयु पूरी होने के बाद की होती है। जब बच्चा 11 वर्ष या उससे अधिक का हो जाता है। अब बच्चा न केवल औपचारिक क्रियाएँ करने में सक्षम हो जाता है, वह शब्द व चिह्नों के प्रयोग द्वारा मात्रा व वस्तुओं के संकेतिक प्रक्षेपण की योग्यता ग्रहण कर लेता है। अब बच्चा परिकल्पना संबंधी कथनों के साथ कार्य करके उनमें तर्कसंगत संबंध ढूँढ़ सकता है।

गणितीय धारणाओं को सीखने में कठिनाई यह है, कि ठोस संदर्भ सामान्यतः पर बच्चों को उपलब्ध नहीं कराए जाते। प्राथमिक विद्यालयों में गणित षिक्षा की जो विधि आजकल अपनायी जा रही है, वह औपचारिक क्रियात्मक बच्चे के लिए तो ज्यादा सही है परन्तु बच्चे को ठोस व अर्थपूर्ण अधिगम अनुभव करना चाहिए, जिनके द्वारा वह गणित की धारणाओं व कौषलों को ग्रहण कर सकें।

E5) आपके अनुभव के अनुसार, आप सामान्य बच्चे की किस आयु को निम्नलिखित धारणाओं को अर्जित करने के लिए तैयार समझते हैं:

i) साधारण श्रेणीकरण

ii) लम्बाई संरक्षण

iii) जोड़ना व गुणा की क्रियाओं में परिवर्तन

iv) समय

इसी के साथ ही हम अपनी इस चर्चा को समाप्त करते हैं कि कैसे अध्यापक गणित सीखने में बच्चों की सहायता कर सकते हैं?

2.3 अधिगम को कैसे आधार दें?

2.3.1 बच्चों की पृष्ठभूमि को आधार बनाएँ

जैसा कि आपने पढ़ा, कोई भी दो बच्चे एक जैसे नहीं होते। हर बच्चे की आयु, जानकारी का स्तर, पृष्ठभूमि आदि भिन्न होती हैं। एक अध्यापक के लिए इन बातों का क्या महत्व है? क्या उसे इन बातों व सीखने के अन्तर की विधियों को ध्यान में रखना आवष्यक नहीं है? नीचे दिए अभ्यास में हम आपसे आपके सीखने वालों के इस पर ध्यान देने के लिए कह रहे हैं।

E6) सीखने वालों के बीच अन्य कौन से अंतर हैं? जिन्हें एक अध्यापक को पढ़ाते समय ध्यान में रखना चाहिए?

चलिए एक उदाहरण देखते हैं जिसमें एक अध्यापक ने अपने विद्यार्थी को सीखने में मदद करने के लिए उसकी पृष्ठभूमि को ध्यान में रखा।

एक गाँव के विद्यालय में पाँचवीं कक्षा के एक बच्चे, सुमित को जोड़ना और घटाना करने की औपचारिक विधियों से परिचित कराया जा रहा था। अध्यापक ने औपचारिक विधि से पहले यह समझने का प्रयास किया कि उसे पहले से ही कितना आता है?

चित्र 1: एक अध्यापक को अपने सीखने वालों में जो फर्क होते हैं, उनके प्रति जागरूक होना चाहिए

अध्यापक : 8 और 11 कितने होते हैं?

सुमित : 19

अध्यापक : यह तुमने कैसे किया?

सुमित : गिनकर! मैंने पहले 11 लिया और फिर 8 जोड़ दिए।

सुमित ने बड़ी संख्या से "आगे गिनने" (counting on) की विधि अपनायी थी और अपनी विधि को वह शब्दों में समझा भी पाया था।

अध्यापक : अच्छा! 22 + 19 कितना होगा?

सुमित (22+19 लिखकर) : 41?

अध्यापक : क्या तुमने 22 से आगे एक–एक करके गिना?

सुमित : मैंने पहले 19 में से 10 लिए, और इस तरह हो गए 32, फिर बचे हुए 9 लिए और 41 हो गए।

इस बार सुमित ने **"पुनः समूहीकरण"** (regrouping) की विधि अपनायी ताकि वह आसानी से जोड़ सके।

इसके बाद उसे दिया गया लिखित अभ्यास : 18

+5

उसका उत्तर था : 41

उसका यह उत्तर कैसे आया? उसने इकाई के कॉलम में 8 और 5 को ठीक जोड़कर उत्तर पाया 13, फिर 1 को इकाई के कॉलम के नीचे लिखकर, "हासिल" के 3 लिए और दहाई के 1 में जोड़ दिए 1 इस तरह इकाई के कॉलम में आया 4, इसलिए, उसका उत्तर था 41!

उसे पूरी तरह से यकीन था कि उसका उत्तर सही है। तब अध्यापक ने प्रष्न को दूसरी तरह से रखना तय किया। उन्होंने कहा, "अगर तुम्हारे पास 18 कंचे थे और तुम्हें 5 कंचे और मिल जाते, तो तुम्हारे पास कुल मिलाकर कितने कंचे हो जाएँगे?" सुमित ने अपनी अंगुलियों पर गिना और कहा 23। जब अध्यापक ने उसका ध्यान उसके लिखित उत्तर की तरफ दिलाया तो वह धीरे–धीरे मान गया कि वह उत्तर गलत था। है ना यह रोचक बात कि वह औपचारिक विधि के स्थान पर, उसके मन से अपनायी गयी विधि को सही मानने को तैयार था?

प्रष्नों को बच्चों के अनुभवों के संदर्भ में रखना चाहिए।

इस उदाहरण में सुमित ने संख्याओं को जोड़ने के लिए उचित और कुशल विधियों को प्रयोग करने की अच्छी तरह विकसित क्षमता का प्रदर्षन किया। यद्यपि उसे औपचारिक प्रतीकों से जोड़–तोड़ करना कठिन लगा। इसके कई कारण हो सकते हैं, यह हो सकता है कि सुमित को स्थानीय मान की पूरी समझ नहीं है। यह भी हो सकता है कि सुमित को दी गई संख्याओं को जोड़ने का यह काम गणितीय नियमों से करना सार्थक न लगा हो। जैसे ही अध्यापक ने प्रष्न को एक संदर्भ में और मूर्त वस्तुओं (कंचे गिनना) के साथ रखा, सुमित उसे समझ गया और इसलिए हल भी कर पाया।

यह उदाहरण स्पष्ट रूप से दिखाता है कि सुमित ने जोड़ करने की अपनी विधियां विकसित कर ली हैं : **"आगे गिनना"** और **"पुनःसमूहीकरण"**। वह संख्याओं के क्रमों से परिचित था और इसलिए वह पुनः समूह बनाकर बड़ी संख्याओं को भी आसानी से जोड़ पाया। यह उदाहरण यह भी दर्षाता है कि अध्यापक ने कैसे सुमित की पृष्ठभूमि का अनुमान लगाया, और कैसे उस जानकारी का उपयोग करके प्रष्न को दो तरह से सुमित के समझाने का प्रयास किया।

i) प्रष्न को उसके अनुभवों के संदर्भ में रखकर, और

ii) प्रष्न को उसके लिए मूर्त बनाकर।

अब आपके लिए एक अभ्यास, जिससे आप जान सकेंगे कि एक अध्यापक के लिए बच्चे का स्तर व पृष्ठभूमि जानना कितना महत्वपूर्ण है।

E7) रवि दिल्ली महानगर पालिका के एक विद्यालय में कक्षा 4 का अध्यापक है। जब नया विद्यालय सत्र शुरु हुआ तो वह पाठ्यपुस्तक खोलकर बच्चों को 4 अंकों वाली संख्याएँ लिखना सिखाने लगा। उसने पुस्तक में से कुछ भाग श्यामपट बोर्ड पर लिख लिया और उसके बाद उन्हें बहुत से सरल प्रष्न देकर कमरे से बाहर चला गया। बाद में, उसे यह देखकर आष्चर्य हुआ कि अधिकतर बच्चे उन प्रष्नों को नहीं कर पाए थे। आपके अनुसार बच्चों की ऐसी स्थिति क्यों बनी?

हमने इस उदाहरण्ण में जो कहने का प्रयास किया है, वह यह है कि जब किसी बच्चे को कोई अवधारणा सिखाई जा रही हो तो यह पहचानना महत्वपूर्ण है कि पहले से उसे क्या–क्या ज्ञात होना चाहिए, और क्या वह उतना सीख चुका है?

2.3.2 खेल व अन्य गतिविधियाँ

बच्चे गणित की कई आधारभूत अवधारणाएँ, खेलों से सीख सकते हैं। उन्हें जाने पहचाने संदर्भों में खेलने में आनन्द मिलता है। उनके खेलों में, अपने आप ही, मज़े–मज़े में, बहुत सारी गणितीय गतिविधियाँ आ जाती हैं। नए विचारों और अवधारणाओं से छोटे बच्चों का परिचय खेलों व ऐसी परिचित स्थितियों में कराया जा सकता है, जो उन्हें मजेदार लगे और जिनसे उन्हें घबराहट या समस्या न हो। यही बात प्राथमिक विद्यालय के बड़े बच्चों भी लागू होती है।

गणितीय अवधारणाओं को खेलों से सिखाया जा सकता है।

जब छोटे बच्चे वस्तुओं को आपस में बाँटते हैं वास्तव में वे एक–से–एक का मेल मिलाते हैं। जब वे गुटकों से खेलते हैं तो वे अलग–अलग आकारों से प्रयोग कर रहे होते हैं। जब वे "पाँच छोटे बंदर" जैसा गाना गाते हैं, तो वे संख्याओं के नाम सीखते हैं।

बच्चों को विस्तृत खेलों में भी मजा आता है। वे सामान्यतः शब्दों के क्रम/प्रतिमान पकड़ने में तेज होते हैं। क्योंकि **प्रतिमान पहचानना** गणितीय दृष्टिकोण का मूलभूत पक्ष है, बच्चे अपनी भाषा विकसित करने के साथ–साथ, वास्तव में गणित का अभ्यास भी कर रहे होते हैं।

आप कोई भी गणितीय अवधारणा सिखाने के लिए बहुत से खेल बना सकते हैं। ये खेल या तो पूरी कक्षा के साथ खेले जा सकते हैं, या छोटे समूहों में। खेल ऐसे भी बनाए जा सकते हैं जिनसे बच्चे **संबंधित गणितीय भाषा** भी साथ ही सीख जाएँ।

यहाँ टीम में खेले जाने वाले कुछ खेलों के उदाहरण दिए जा रहे हैं। टीम छोटी (1–3 बच्चे) या बड़ी (15–20 बच्चे) हो सकती है। हम छोटे बच्चों के कुछ खेलों से प्रारम्भ करते हैं।

क) एक टीम अपने सामने कुछ कंकड़ रख लेती है। दूसरी टीमः

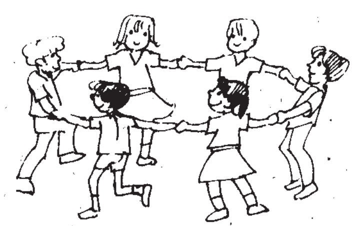
पहला खेल – उतने ही कंकड़ रखे, या

दूसरा खेल – गिने और बताए कि वे कितने हैं, या

तीसरा खेल – 14 कंकड़ (मान लीजिए) पूरे करने के लिए जितने भी कंकड़ और चाहिए उतने रखें, या

चौथा खेल – 3 कंकड़ छोड़कर शेष उठा लें, आदि।

जैसे–जैसे खेल आगे बढ़ता है आप उन्हें संख्याओं के नाम भी सिखा सकते हैं।



चित्र 3: बच्चे खेल–खेल में गणितीय आकारों के बारे में सीख सकते हैं।

ख) एक टीम दो पासे (बिन्दु या संख्याओं वाले) फेंके और कंकड़ों के ढेर में से उतने कंकड़ उठा ले जितना कि दोनों पासों की संख्याओं का जोड़ हो (या अंतर हो, या गुणा हो)। दूसरी टीम भी ऐसा ही करे। दो बार खेलने के बाद जिसके पास भी अधिक कंकड़ होंगे वह जीत जाएगा।

यहाँ भी, खेल के दौरान बच्चे *"छः जोड़ दो बराबर आठ"* जैसी भाषा से उचित ढंग से परिचित हो सकते हैं।

ग) कंकड़ों, पासों, टहनियों, कार्डों या मोतियों से आप "स्थानीय मान" सिखाने के लिए खेल बना सकते हैं। 10 कंकड़ों (10 के आधार के लिए) को एक कार्ड या एक मोती के बराबर मानकर, अदला–बदली की जा सकती है और इसका लेखा–जोखा रखा जा सकता है। एक बार जब वे दहाइयों और इकाइयों की पहचान मूर्त वस्तुओं से बना लेते हैं तो उन्हें संख्यांकों का प्रयोग करने वाले खेलों से भी परिचित करवाया जा सकता है।

उदाहरण के लिए, आप 10–10 कार्डों के दो समूह ले सकते हैं जिन पर 0 से 9 तक के संख्यांक लिखे हों। इन्हें बच्चों के दो समूह प्रयोग करेंगे। बच्चे कार्डों को फेंट कर और उल्टे करके मेज पर रखे दे। फिर ये बारी–बारी से एक बार में एक कार्ड चुनेंगे और उसे श्यामपट पर "इकाई" या "दहाई" के स्तंभ में रखेंगे। एक कार्ड जहाँ रखा जा चुका है वहाँ से हटाया नहीं जा सकता। उद्देष्य सबसे बड़ी संख्या बनाना हैं वे जो भी अंक बनाए उसे जोर से बोल दें। उदाहरण के लिए, यदि पहले समूह का संख्या 3 का कार्ड खुला और उसे उन्होंने दहाई के स्तम्भ में रखा, जो उन्हें जोर से 30 कहना चाहिए, आदि।

आप नीचे दिया हुआ अभ्यास करते समय कई प्रकार के और खेल सोच सकते हैं।

E8) बच्चों को निम्नलिखित अवधारणा सिखाने के लिए एक–एक खेल का उदाहरण लिखेंः

i) गुणा;

ii) एक वृत्त क्या होता है?

iii) अनुमान लगाने की क्षमता।

यह भी बताएँ कि इन अवधारणाओं या कौषलों को सिखाए जाने से पहले आपके विचार से बच्चों को क्या जानकारी होनी चाहिए?

नीचे हमने अनुमान आधारित के कुछ खेलों के उदाहरण दिए हैं। इनसे बच्चों को अपने गणितीय सोच और भाषा का विकास करने के बहुत से अवसर मिलते हैं। आप भी ऐसे कई तरह के खेल सोच सकते हैं।

क) एक टीम एक संख्या सोच ले, और अध्यापकों के कान में बता दे। दूसरी टीम को यह संख्या बतानी है। संख्या अनुमान लगाने के लिए उन्हें कुछ संकेत दिया जाएगा जैसेः यह संख्या पाँच और नौ के बीच की एक अभाज्य (prime) संख्या है", या "यह इस कक्षा की 90 प्रतिषत लड़कियों का 2/5वाँ हिस्सा है।" क्योंकि बच्चे प्रष्न बना रहे हैं, इसलिए वे उनके स्तर पर ही निर्भर करेंगे।

ख) एक और खेल में कक्षा के सामने जानी पहचानी वस्तुओं का एक ढेर रख दिया जाए। एक टीम या बच्चे (आप जैसे भी खेल खिलाना चाहें) से किसी एक वस्तु को चुनने व उसका नाम अध्यापक के कान में कह देने के लिए कहा जाए। दूसरे बच्चे/समूह बारी–बारी से चुनी हुई वस्तु का अनुमान लगाएँ, जिसके लिए वे उसके माप, आकार या दूसरी वस्तुओं के सापेक्ष वस्तु का स्थान जैसे संकेतों को आधार बनाएँ। जैसे, यह अधिक लम्बी है, अधिक भारी है, सामने रखी हैं, यह गोल नहीं है, आदि–आदि।

गणितीय सोच से संबंधित कई कुषलताएँ विकसित करने के लिए खेलों का उपयोग किया जा सकता है।

ग) आप अनुमान आधारित ऐसे खेलों के बारे में सोच सकते हैं, जिनमें अनुमान लगाने वाले कुछ ऐसे प्रष्न ही पूछ सकते हैं, जिनके उत्तर "हाँ" या "नहीं" में ही हों। ऐसे खेल

बच्चों को विशिष्ट प्रष्नों से (क्या वह दरवाजा है? पुस्तक है?) अधिक व्यापक प्रष्नों (क्या उस बैठ सकते हैं? क्या वह मेरे जितना बड़ा है? क्या कमरे में एक से अधिक हैं?) की ओर बढ़ने का अवसर देते हैं। इससे उत्तर तक पहुँचने के लिए आवष्यक प्रष्नों की संख्या कम हो सकती है। जैसे, मान लीजिए कि चुनी हुई वस्तु 1 से 100 के बीच की संख्या है। प्रारम्भ में, संभवतः बच्चे अलग–अलग संख्याएँ लेकर पूछें कि क्या वह 4 है, या 26 आदि। कुछ समय के बाद वे पूछना सीख जाएँगे कि "क्या वह 4 से बड़ी है?" "क्या वह सम संख्या है?", आदि। बाकी बच्चे भी इस विधि को जल्दी समझ लेंगे। या, मान लीजिए, चुनी हुई वस्तु एक बेलनाकार डिब्बा है। तब प्रष्नों में गणित की शब्दावली आ जाएगी, जैसे – क्या वह **गोलाकार** है? क्या वह किसी रेखा के प्रति **सममित** है?, क्या उसमें **4 कोण** है?

अच्छे प्रष्न बनाना गणितीय चिन्तन के विकास का भाग है।

ऐसे खेल बच्चों की **व्यापकीकरण करने, विशिष्टीकरण करने, अनुमान लगाने व क्रम पहचानने की क्षमताएँ** विकसित करके उनमें गणितीय सोच का विकास करते हैं, अर्थात् ये सब उनकी गणितीय सोच व तार्किक क्षमता बढ़ाते हैं।

और बच्चों में गणित की समझ बढ़ाने के लिए सामूहिक नृत्य और खेल–कूद की गतिविधियों आदि के प्रयोग के बारे में आप क्या सोचते हैं? अब आप भी ऐसे कुछ उदाहरण दीजिए।

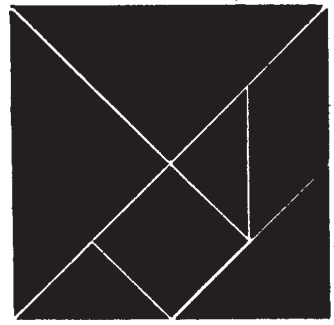
E9) बच्चों को समय के अंतराल की अवधारणा से परिचित कराने के लिए अनुमान आधारित एक खेल बनाएँ।

E10) आप ज्यामिति की अवधारणाएँ सिखाने के लिए सामूहिक नृत्य का उपयोग कैसे करेंगे?

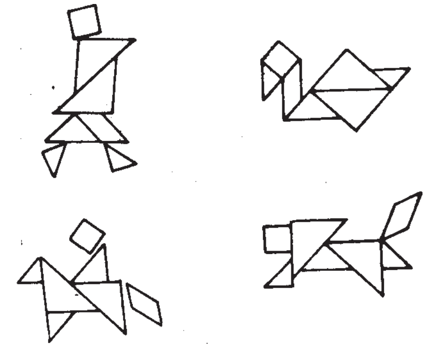
बहुत सी अन्य मनोरंजक गतिविधियों का उपयोग बच्चों को ज्यामिति की विभिन्न अवधारणाओं से परिचित कराने के लिए किया जा सकता है। जैसे, बच्चे सममिति (symmetry) के बारे में "रंगोली" के सममित (symmetrical) क्रम, कागज पर बना कर सीख सकते हैं।

ओरीगामी, अर्थात् कागज मोड़ने की कला, के द्वारा अलग–अलग दो व तीन–आयामी आकारों से उनका परिचय कराया जा सकता है। सिखाते समय, हर कदम पर अध्यापक गणित की शब्दावली पर बल दे सकता है जैसे, "अब कागज को मोड़कर **आधा** करो", "फिर मोड़कर इससे **एक वर्ग बनाओ**", "जब तुम इसे **कोने** को इस तरह से मोड़ोंगे (दिखाकर), यह एक **त्रिभुज** बन जाएगा।" **टैनग्राम** का प्रयोग भी इसी उद्देष्य के लिए किया जा सकता है।

चित्र 4: बच्चे गणितीय कुषलताएँ कागज मोड़ने की कला (ओरागामी) से सीख सकते हैं।



(क)



(ख)

चित्र 5: (क) एक टैनग्राम, (ख) टैनग्राम से बने कुछ आकार

अभी तक हमने मूर्त से अमूर्त की ओर बढ़ना, मूर्त विधि पर अधिक समय लगाना, और गणित पढ़ाने के लिए मनोरंजन गतिविधियों का प्रयोग करना – इन बातों के महत्व पर बल दिया। सीखने का वातावरण बनाने के लिए यह सब पर्याप्त नहीं है। अगले भाग में हम इसके कुछ अन्य पहलुओं पर चर्चा करेंगे।

2.4 सीखने में मदद कैसे की जा सकती है?

इस भाग में हम तीन बातों पर विशेष ध्यान देंगे – पुनरावृत्ति की आवष्यकता, दूसरे बच्चों से सीखना और त्रुटियों का प्रयोग करके सीखना।

2.4.1 पुनरावृत्ति, थकाने वाली न हो

बहुत छोटी आयु से ही बच्चे कई बातों को दोहराते हैं और इससे सीखते हैं, जैसे, वस्तुएं गिराना व उठाना, डिब्बे और टीन खोलना और बंद करना, कुछ शब्दों को बार–बार दोहराना, ताक–झाँक का खेल बार–बार खेलना, बड़ों से बार–बार कहानियाँ दोहराने को कहना, आदि। क्या आप इनमें से किसी भी कार्य को रट कर सीखना कहेंगे? अर्थात्,

पुनरावृत्ति से, न कि रटने से, बच्चों को सीखने में सहायता मिलती है।

पुनरावृत्ति का अर्थ रटना नहीं है।

पुनरावृत्ति की ऐसी कई नयी विधियां सोची जा सकती हैं, जिनसे इसे मजेदार बनाया जा सके। इसे बच्चे मनोरंजन गतिविधियों के द्वारा कर सकते हैं, जिनमें से कुछ का प्रारम्भ वे स्वयं भी कर सकते हैं। पुनरावृत्ति के समय भाग लेने वाले बच्चे हर बार कुछ नया व अन्तर देखते और अनुभव करते हैं।

दूसरी ओर, रट कर सीखने में इस प्रकार की विभिन्नता नहीं होती क्योंकि उसमें प्रक्रिया की पुनरावृत्ति नहीं होता, वरन् "जानकारी" ही मषीनी रूप में दोहराई जाती है (उदाहरण के लिए, पहाड़े मषीनी रूप से रट कर याद करना)।

यदि आप आस–पास देखें तो आप पाएँगे कि किसी भी बच्चे के वातावरण में दोहराना स्वाभाविक तौर पर अलग–अलग रूपों में होता है। लेकिन सीखने के औपचारिक वातावरण में, बच्चों की रूचि बनाए रखने के लिए, दोहराने को काफी विविधता के साथ जानबूझ कर प्रयोग करना पड़ता है। आप इस चुनौती को कैसे पूरा करेंगे? सम्भवतः नीचे दिया गया उदाहरण हमें कुछ दिषा दें।

बच्चे सामान्यतः पहाड़ों से बहुत परेषान रहते हैं। क्या यह सचमुच आवष्यक है कि उन्हें मषीनी विधियां से बार–बार दोहराया जाए? और क्या इस तरह रटकर याद करने से बच्चे को पहाड़ों को समझने में सहायता मिलती है? क्या यह सच नहीं है कि एक दिए हुए क्रम में पहाड़ों को सिर्फ रटने से उनकी समझ एक सतही स्तर तक ही रह जाती है? बच्चे इनको आसानी से प्रयोग ही नहीं कर पाते। यह बात तब स्पष्ट परिलक्षित होती है जब आप किसी और क्रम में उनसे गुणज पूछें। क्या यह अच्छा नहीं है कि किसी बात को सिर्फ रटवाने के स्थान पर बच्चे को उसमें लागू क्रम पहचानने में मदद की जाए? बच्चों के मस्तिष्क में गुणज की समझ बैठाने के लिए और पहाड़ों में शामिल क्रमों को पहचानने की क्षमता विकसित करने के लिए आप कई गतिविधियाँ सोच सकते हैं। उदाहरण के लिए, बच्चों से दो–दो, चार–चार, पाँच–पाँच सेबों के समूह को पहचानने के लिए कहा जा सकता है। और फिर उनसे "चार–चार सेबों वाले कितने समूह हैं?" "ये कुल कितने सेब हुए?" जैसे सरल प्रष्न पूछे जा सकते हैं। और इस तरह की गतिविधि तरह–तरह की वस्तुओं से की जा सकती है।

नीचे दिया गया अभ्यास करते समय आप इस तरह की कुछ और गतिविधियाँ सोच सकते हैं।

E11) आप बच्चों की पाँच–पाँच और दस–दस के समूह बनाने में सहायता के लिए कक्षा में की जाने वाली किस तरह की गतिविधियाँ सोच सकते हैं?

जब उनको इस तरह की गतिविधियों का काफी अभ्यास हो जाए, तब वे जो कर रहे हैं उसे गणितीय भाषा से लिखने के लिए उनकी सहायता की जा सकती है। जैसे, वे दो–दो सेबों वाले 4 समूहों को $4 \times 2 = 8$ लिख सकते हैं। इसे चित्र द्वारा भी दिखा सकते हैं।

हमने पूर्व में उन गतिविधियों की चर्चा की है जिनसे बच्चों को गुणा समझने में सहायता मिल सकती है।

अब बच्चे पहाड़ों में आसानी से क्रम खोज पाने की स्थिति में होंगे। आप उनसे 10×10 का क्रम, जैसे कि नीचे E12 में दिया गया है, पूरा करने को कह सकते हैं। हर खाने में बच्चे को खाने की पक्तियों की संख्या और उसकी स्तंभ की संख्या का गुणनफल भरना होगा।

इस तरह की गतिविधि कुछ लम्बे समय तक की जा सकती है। बच्चों को या तो उतना समय दिया जा सकता है, जिनता उनको चाहिए या जितने समय तक उनकी रुचि गतिविधि में बनी रहे। उन्हें आपस में बात करने दें और क्रम स्वयं ही खोजने दें।

यहाँ दो संबंधित अभ्यास आपके लिए।

E12) यह देखने का प्रयास कीजिए कि अलग–अलग बच्चे किस क्रम में संख्याएँ ग्रिड में भरते हैं। मैं निष्चित रूप से कह सकता हूँ कि सभी बच्चे एक, पाँच और 10 के सारे गुणनफल पहले भरेंगे। आप मेरे इस दावे की जाँच कीजिए। क्या आपको इस दावे को गलत सिद्ध करने वाला कोई प्रमाण मिला?

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

E13) क्या पुनरावृत्ति के द्वारा बच्चों के समय की अवधारणा समझने में मदद की जा सकती है? इसके लिए एक ऐसी गतिविधि को विस्तार से लिखकर बताइए जो पाँच बच्चों के एक समूह को दी जा सके।

पुनरावृत्ति रुचिकर व अलग–अलग विधियों से होनी चाहिए, जिससे बच्चों की सीखने में रुचि बनी रहे।

हमने पिछली इकाई में कहा था कि **बच्चे बिना दबाव वाले वातावरण में सबसे अच्छी तरह सीखते हैं।** अब हम ऐसा वातावरण बनाने की एक विधि पर बात करेंगे।

2.4.2 बच्चे एक–दूसरे से सीखते हैं

एक दिन मैं पास के ही एक विद्यालय में, अध्यापक और बच्चों के बीच किसी तरह की परस्पर क्रिया होती है, यह देखने गई थी। बच्चों को उनकी अध्यापिका ने एक प्रष्न दिया हुआ था, और वे अपनी कॉपी में उसे हल करने में लगे हुए थे। अध्यापिका बच्चों के बीच घूम रही थी और रूक–रूक कर उनसे पूछ रही थी कि कोई एक उत्तर उन्होंने कैसे निकाला? ऐसा करने पर अधिकतर बच्चों ने अपना लिखा हुआ मिटा दिया, चाहे वह सही था या गलत। आपने भी ऐसा व्यवहार देखा होगा। इससे क्या पता चलता है? क्या यह प्रष्न हल करने की अपनी क्षमता के बारे में आत्मविष्वास की कमी नहीं दिखाता है? आत्मविष्वास की यह कमी बड़ों में भी होती है, जब उनका किसी विशेषज्ञ से सामना होता है।

जिन बच्चों को सोचने की अपनी क्षमता पर भरोसा नहीं होता, उन्हें बाद में इस क्षमता को विकसित करने में समस्या होगी। इसलिए **यह आवष्यक है कि सीखने का वातावरण ऐसा बनाया जाए, जिससे बच्चों का आत्मविष्वास बढ़े।**

परन्तु यह हम कैसे कह सकते हैं? यदि समूहों में खेलते हुए बच्चों को आप ध्यान से देखें तो आपको संभवतः कुछ संकेत मिल जाए। बच्चे जब एक साथ खेलते हैं, तो वे एक–दूसरे की सोच का आँकलन करते रहते हैं। खेलों व गतिविधियों से बच्चों को एक–दूसरे से, बिना किसी डर के, एक स्वतंत्र और खुले वातावरण में मेल–जोल का अवसर मिलता है। ऐसे मेल–जोल के समय बच्चे अपनी बातों को एक–दूसरे के सामने उत्तरों और सुझावों के तौर पर रखते हैं। एक बच्चे के लिए दूसरे की बात का महत्व इतना ही होता है कि वह एक विचार होता है, जिसे जाँच कर माना भी जा सकता है या नहीं भी।

दूसरी तरह, कोई बड़ा, आम तौर पर बच्चों के सामने अपना मत एक "सच्चाई" के रूप में रखता है, जिसे बिना किसी प्रष्न या संदेह के मानना पड़ता है। यदि बड़े के कथन को बच्चे शंका से देखें और सोच में पड़ जाए, तो बड़ा अपने कथन को दोहराता है, पहले धीरज से, फिर चिड़चिड़ाकर, और अंत में, गुस्से से। अंतिम निष्कर्ष होता है, "मूर्ख! तुम यह भी नहीं समझ सकते!" बच्चा, जो पहले से ही यह समझता है कि वह बड़े के सामने कुछ भी नहीं है, अपने बारे में यह विचार स्वीकार कर लेता है और उसका आत्मविष्वास कम होने लगता है।

इसलिए, सीखने के लिए, **बिना डर के आपसी मेलजोल** होना बहुत आवष्यक है। इस तरह का मेल–जोल अन्य कारणों से भी महत्वपूर्ण है। हम आपसे नीचे दिए गए अभ्यास में उनके बारे में सोचने को कह रहे हैं।

E14) क्या आप बच्चों के आपसी मेल–जोल और एक–दूसरे से सीखने के और लाभ सोच सकते हैं?

यदि आप इससे सहमत हैं कि बच्चे एक–दूसरे से बहुत कुछ सीखते हैं, तो हम उन्हें ज्यादा से ज्यादा ऐसे अवसर किस तरह दे सकते हैं? महत्वपूर्ण बात यह है कि ऐसी परस्पर क्रियाएँ अनौपचारिक हो, मनोरंजन हों और बिना किसी डर के हो। एक बच्चे से मात्र यह कह देना किः

"तुम अपने पड़ौसी / दोस्त / भाई / बहन को पढ़ा दो" सामान्यतः प्रभावी नहीं होता। यह इसलिए क्योंकि तब बाल–अध्यापक बड़ों की नकल करने की कोषिष करता है, और सीखने वाला उतना ही घबरा जाता है, जितना कि बड़े से।

बच्चे एक–दूसरे से सीख पाए, ऐसी स्वाभाविक और कुछ परिणामात्मक परिस्थिति बना पाना आसान नहीं है। संभवतः, बच्चों को बिना उनकी जानकारी के, स्वाभाविक तरह से मिलते–जुलते, खेलते, बात करते हुए देखना चाहिए। इससे संभवतः हमें कोई विधि समझ में आए कि कक्षा में ऐसी स्थितियाँ कैसे बनाई जा सकती हैं जिनमें बच्चे एक–दूसरे से सीख सकें।

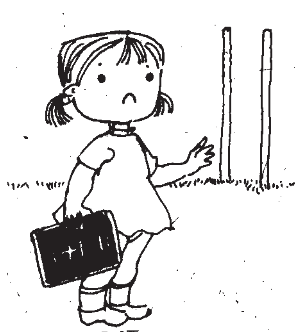
इससे संबंधित एक अभ्यास आपके लिए प्रस्तुत है।

E15) कुछ बच्चों की स्वाभाविक अंतःक्रिया को देखने के बाद, इसकी वे विशेषताएँ लिखिए, जिनके कारण बच्चों के लिए एक–दूसरे से सीखने की विधि, अन्य विधियों से अच्छी साबित होती है।

एक और बात है जो हम बड़ों को सीखने का बेहतर वातावरण बनाते समय ध्यान में रखनी चाहिए। हमने इसका संकेत, इसी इकाई में पहले दिया था। उसके बारे में हम अब चर्चा करेंगे।

2.4.3 त्रुटियाँ भी उपयोगी होती हैं

बच्चों को पढ़ाने के दौरान आपने पाया होगा कि बच्चे बहंत सी त्रुटियाँ करते हैं। त्रुटियाँ होने पर आप क्या करते हैं? इनसे आपको बच्चे के बारे में क्या पता चलता है – सीखने में असफलता, या समझने का एक प्रयास? या दोनों? यदि ऐसा है, तो आप इन दोनों में अंतर कैसे करते हैं? और कैसे तय करते हैं कि किसी खास परिस्थिति में क्या है?



चित्र 6: बच्चों की त्रुटियाँ उनके संसार को समझने का अवसर देती हैं।

बच्चों की त्रुटियाँ उनकी सीखने की प्रक्रिया का स्वाभाविक और जरूरी भाग है। नई अवधारणाओं को समझने की प्रक्रिया में बच्चे अपनी अभी तक की समझ को लागू करते हैं। हो सकता है कि यह औपचारिक षिक्षण की विधि व विषयवस्तु से मेल न खाएँ।

बच्चों की त्रुटियों से यह भी पता चलता है कि बच्चे कैसे सोचते और सीखते हैं। जैसे, 51 के लिए 15 लिखना हमें यह बताता है कि बच्चा अभी भी स्थानीय मान की अवधारणा समझ नहीं पाया है, और उसे समूह बनाने का और अभ्यास करने की जरूरत है।

बच्चे की गलती को इस तरह से ध्यान से देखने से अध्यापक को सीखने वाले का गणितीय दृष्टिकोण विकसित करने में बहुत सहायता मिल सकती है। त्रुटियाँ करना और उनसे सीखना एक मजबूत समझ बनाने की प्रक्रिया का भाग है, बल्कि, यह सही उत्तर निकालने से ज्यादा महत्वपूर्ण है। दुर्भाग्यवष, परंपरागत अध्यापक अभी भी यही मानते हैं कि सीखना केवल तभी होता है, जब सही उत्तर दिए जाएँ।

त्रुटियों का विश्लेषण अध्यापक के लिए सहायक होता है।

नीचे दिए गए अभ्यास में हम आपसे एक बच्चे की गलती को ध्यान में रखने को कह रहे हैं।

E16) एक पाँचवी कक्षा की बच्ची "$3 + _ = -3/2$" में रिक्त स्थान में $9/2$ भरती है। आपके विचार से यह गलती क्यों हुई? आप इस स्थिति को कैसे सुधारेंगे?

इसके साथ ही हम अपनी इस चर्चा के अंत में पहुँच गए हैं कि बच्चों के लिए सीखने का अच्छा वातावरण किन–किन विधियों से बनाया जा सकता है। चलिए, अब संक्षेप में देख लें कि हमने इस इकाई में क्या चर्चा की है।

2.5 सारांष

इस इकाई में हमने ध्यान इस बात पर अधिक केन्द्रित किया है कि किस प्रकार गणित सीखने व सिखाने के प्राथमिक कक्षा के बच्चों के लिए अर्थपूर्ण बनाया जाए? हमने उन कुछ विधियों के साथ आरंभ किया, जिन विधियों को बच्चे सामान्यतः गणित सीखने के लिए अपनाते हैं। बच्चे अपने अनुभवों द्वारा सीखते हैं और वही युक्तियाँ अपनाते हैं जिन्हें वे सोच सकते हैं। उसके बाद हम आगे बढ़े कि कैसे गणित सीखने में हम बच्चे की सहायता कर सकते हैं? हमने यहां देखा कि गणित तब सीखा जा सकता है, जब वह बच्चों की सोच से संबंधित हो। इस प्रक्रिया में निम्नलिखित बिन्दु स्पष्ट हुए हैं, जिनका बच्चों की ज्ञान–ग्रहण की गुणवत्ता पर प्रभाव पड़ता है।

- अध्यापक के लिए अपने विद्यार्थियों को जानना आवष्यक है।
- प्रत्येक बच्चा अपने अनुभवों से ही सीखता है।
- बच्चे अपनी ही खोजी हुई विधियों से सीखते हैं।
- बच्चे दैनिक कार्यों में ऐसी परिस्थिति में से गुजरते हैं, जहाँ वे अपनी गणितीय जानकारी का कुछ उपयोग करते हैं।
- अलग–अलग बच्चे सीखने में अपना–अपना समय लेते हैं।
- बच्चा आपके पास कुछ बौद्धिक विकास के स्तर एवं जानकारी के साथ आता है, आपको उसी को आगे बढ़ाना है।
- उपयुक्त खेल व अन्य क्रियाएँ षिक्षा में मदद करने के लिए सृजित की जा सकती है।
- पुनरावृत्ति से बच्चे को नए विषय को समझना आसान हो जाता है, इसलिए आवष्यक है कि उसे रुचिपूर्ण बनाया जाना चाहिए। दोहराना, रटना नहीं होना चाहिए।
- बच्चे अपने समकक्षों से आसानी से सीखते हैं, क्योंकि उनकी परस्पर वार्ता में कोई अधिकार व धमकी नहीं होती।
- बच्चों के प्रयासों को विष्लेषित करना चाहिए व उन्हें षिक्षण के लिए उपयोग में लाना चाहिए।

2.6 अभ्यासों पर टिप्पणियां

E1) क) सही ख) गलत ग) गलत घ) गलत

E2) उदाहरण के लिए, पर जब मैंने कुछ आठ वर्षीय बच्चों को 12 से 8 से गुणा करने के लिए कहा तो मैंने पाया कि एक बच्चा 12 को 8 बार जोड़ रहा था व दूसरा 12 को 10 से गुणा कर, उसमें से दो बार 12 को घटा रहा था।

E3) क) बार–बार समूह बनाना व जोड़ करना

ख) गिनती करना

ग) एकत्रीकरण व गणना का प्रयोग

घ) सभी को गिनना

E4) आप सुझाव दे सकते हैं कि :

i) यदि आप मापने का प्रष्न करवा रहे हैं तो बच्चों को किसी पंसारी की दुकान पर ले जा सकते हैं। माता–पिता, बच्चों को भार इत्यादि के बारे में बात करके उसका पैसों से संबंध बता सकते हैं तथा वे उनसे विभिन्न मापन इकाइयों के बारे में भी बात कर सकते हैं।

ii) बच्चों को बाहर ले जाए व उन्हें इमारतों पर, बसों व टैक्सियों पर क्या लिखा है? उसे पढ़ने में लगाएँ। बच्चे अपने अंकों के ज्ञान को पुनः याद कर लेंगे व विभिन्न विधियां सीख लेंगे जो उन्होंने उपयोग की है। विभिन्न स्थितियों में इन अंकों पर कार्य करने की संभावनाओं के बारे में उनसे बात करें। वे विभिन्न वस्तुओं में सामंजस्य ढूँढ़ लेंगे, जैसे कि लोगों के पहनने वाले कपड़ों व उनमें बने हुए ज्यामितीय आकारों में भी।

E5) एक शहरी मध्यवर्गीय रहन–सहन में यह संभवतः होगी।

i) 4 वर्ष ii) 7 वर्ष iii) 9 वर्ष iv) 9 से 11 वर्ष

E6) उनकी पहली भाषाएँ, भाषा पर उनकी पकड़ व माता–पिता के शैक्षिक स्तर में अंतर हो सकता है। अन्य कारणों के साथ इसे भी सूची में ले।

E7) यह जानने का प्रयास नहीं किया गया कि बच्चों को कितनी जानकारी है। क्या वे स्थान व स्थान मूल्य समझते हैं? क्या वे तीन अंकों वाली राषि लिख सकते हैं? मूर्त वस्तुओं द्वारा तीन व तीन से अधिक अंकों वाली राषियों को पढ़ाया नहीं जा सकता। क्या बच्चे औपचारिक विधियों के लिए तैयार हैं? इस अभ्यास में स्थिति की चर्चा करते समय इन प्रश्नों व दूसरे अन्य प्रष्नों को ध्यान में रखने की आवष्यकता है।

E8) स्व अनुभव लिखें।

E9) स्व अनुभव लिखें।

E10) बच्चे विभिन्न द्विआयामी आकारों से संबंधित गाने गा सकते हैं। वे जब किसी आकार का नाम लेंगे, जैसे वृत्त, वे एक–दूसरे का हाथ पकड़ कर एक वृत्त बना सकते हैं। आगे, यदि वे एक त्रिभुज के बारे में गाएं, तो वे एक त्रिभुज का आकार बनाएंगे, आदि यह सब लय में किया जा सकता है।

E11) कक्षा 1 (एक) के बच्चों को विद्यालय आते समय रास्ते से बहुत से पत्थर, पत्तों व टहनियों को उठाने के लिए कहा जा सकता है। तब उन्हें इन्हें समूहों में रखने के लिए कहा जाएँ और वे ऐसे समूह बनाए कि प्रत्येक समूह में पत्ते/पत्थर/टहनियाँ उतनी हों जितनी एक हाथ में अंगुलियाँ। ऐसा प्रतीत होता है कि बहुत छोटे बच्चे भी यह जानते हैं कि पाँच को हाथ की तीन उंगलियों द्वारा बताया जा सकता है। मिलान करने की इस क्रिया द्वारा वे पाँच–पाँच के समूह बना सके। इस क्रिया को और अन्य वस्तुओं द्वारा भी किया जा सकता है।

E12) स्व अनुभव लिखें।

E13) स्व अनुभव लिखें।

E14) यह बिना किसी बड़े की ओर मदद के लिए देखे, अपने आप सोचने की उनकी क्षमता को विकसित कर सकता है यह ध्यानपूर्वक सोचने की उनकी योग्यता को विकसित करने के लिए आवष्यक है। समकक्षों में परस्पर क्रिया से बच्चे को अपना व अपने साथियों का उचित स्थान पता चल जाते हैं।

E15) स्व अनुभव लिखें।

E16) जो औपचारिक चिन्ह प्रयोग में आते हैं, ऐसा लगता है कि बच्चा उन्हें नहीं समझता है। संभवतः बच्चा यह भी नहीं समझता है कि 3 को 9/2 से कैसे भाग करें। इसके समाधान के लिए मूर्त प्रणाली द्वारा प्रयास करूँगा व बच्चे को एक खंड से दूसरे खंड द्वारा भाग देने की प्रक्रिया सिखाऊँगा।

टिप्पणीः जिन प्रष्नों को इस इकाई में संबोधित किया गया है उनकी चर्चा आगे आने वाले खंडों में की गई है। कुछ प्रष्नों के उत्तर देने के लिए आपको खंडों का अवष्य अध्ययन करना चाहिए।